

---

# MODELO ESTÁTICO DEL MOMENTO VOLCANTE Y POTENCIAL FRACTURA EN UN ÁRBOL

Walter Bussenius Cortada<sup>1</sup>, Abraham Farias Flores<sup>2</sup>, Oscar Bustos Letelier<sup>3</sup>

## RESUMEN

El presente trabajo corresponde a un modelo estático que analiza el comportamiento de un árbol ante la fuerza ejercida por el viento sobre éste. Para el establecimiento del modelo se asumió una determinada variación de la velocidad del viento con respecto a diferentes alturas en el árbol, y en particular para el follaje y el tronco del árbol. De esta manera se estudió la distribución de fuerzas sobre el follaje, el momento flector, y el esfuerzo de corte, estimando de esta manera la zona de más probable fractura en el árbol. Se empleó para ello un modelo de follaje y de fuste de forma cónica y una fuerza del viento proporcional al cuadrado de la velocidad de éste y creciente con la altura en una forma de proporcionalidad directa. De acuerdo con el modelo obtenido, la zona más probable de fractura estaría ubicada en la mitad superior del árbol.

Palabras clave: Modelación, daño por viento

## SUMMARY

The present paper analyzes a static model of tree behavior due to the effect of wind force. It is assumed a determined wind speed variation with the height and a specific for foliage and stem. The forces distribution over the foliage, the flexor moment, and the cutting stress were studied, estimating the more likely fracture zone. Thus, a conic shape foliage model was used and a wind force proportional to the speed squared of it and increasingly with the height in a direct proportionality. Findings showed the model obtained indicated that the fracture zone would be in upper half of tree.

Key words. Modeling, wind damage

---

1-Instituto de Física y Matemáticas, Universidad de Talca, Chile. Email: wbussen@utalca.cl

2-Facultad de Ingeniería, Universidad de Talca, Chile. Email: afarias@utalca.cl

3-Facultad de Ciencias Forestales, Universidad de Talca, Chile. Email: obustos@utalca.cl

## INTRODUCCIÓN

Las fuertes ráfagas de viento con prolongadas duración que ocurren durante muchas tormentas en la zona sur de Chile, como en la precordillera de la zona central, han tenido como consecuencia, entre otras, la fractura de muchos árboles tanto a edad temprana como adulta, y que conlleva serios problemas económicos. El efecto del viento sobre los árboles y su mayor o menor cantidad de daños, dependerá de variables tales como especie, tipo de suelo, y humedad del suelo (Day 1950, Fraser 1962, y Alexander 1967), factores geográficos (Fraser y Gardiner 1967), condiciones climáticas locales y el tipo de intervenciones intermedias realizadas.

En este trabajo se presenta un modelo simple caracterizado por un análisis estático del árbol y el efecto que causa la fuerza del viento sobre éste. Para ello se utilizó un modelo geométrico en forma de cono que caracterizó al fuste y el follaje, y se consideró parte del fuste sin ramas, producto de las podas realizadas durante el manejo. De esta manera se determinó el lugar del árbol con mayor vulnerabilidad a la acción del viento.

## METODOLOGÍA

### Desarrollo del Modelo

El modelo consideró la forma geométrica de cono para el árbol para el follaje y el fuste. Para el caso de la figura de cono que representó al fuste, se le efectuó un pequeño "corte" en el ápice, de modo de describir de mejor manera la función matemática que lo define. El área de influencia del viento sobre el cono que corresponde al follaje, resulta ser un triángulo, el cual parte con el vértice en el ápice y tiene como base la altura de la última poda efectuada.

Para modelar el estado de cargas, se consideró la velocidad del viento como máxima en la copa del árbol ( $v = v_0$ ) y nula en la base del suelo ( $v = 0$ ). Debido a que el efecto del viento sobre un área determinada del follaje ejerce una fuerza, esta fue considerada proporcional al cuadrado de la velocidad del viento (Day 1950).

Para determinar los efectos del estado de carga sobre el árbol, se consideró teóricamente al árbol como una viga empotrada al piso, de manera de determinar los esfuerzos de corte y el momento flector que se producen a lo largo de una viga de una sección circular variable. Así, el momento de inercia variable, sometido a un sistema de carga distribuida, se definió en base a una función matemática que describió la fuerza del viento. La Figura N° 1 muestra el modelo y las variables involucradas para el follaje y el viento.

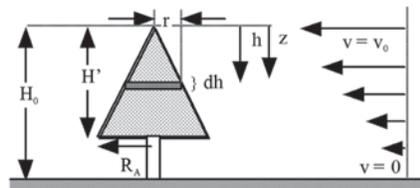


Figura N° 1  
MODELO Y VARIABLES INVOLUCRADAS

Donde:

Ho:	Altura total del árbol	
H':	Altura del follaje	
Ro:	Radio de la base del follaje	
r:	Radio del follaje a una altura h	
h:	Distancia del ápice a un punto	cualquiera
vo:	Velocidad máxima en el ápice	
z =	h/Ho	

Nota: Las variables de altura se midieron desde el ápice a la base del árbol.

Un desglose de cada parte del modelo se llevó a efecto con el objeto de mostrar las relaciones existentes entre las variables con los resultados predictores.

### **Análisis del Follaje**

La fuerza que ejerce el viento sobre un árbol en pie corresponde a la presión de éste por el área del follaje. Para ello, se utilizó un modelo en que el follaje fue equivalente a un triángulo isósceles, de altura H' y base 2Ro. Así el radio R del follaje en función de altura h quedó establecido por:

$$r(h) = R_o h/H' \quad 0 < h < H' \quad (1)$$

$$\text{donde:} \quad r(h) = 0 \quad H' < h < H_o$$

### **Análisis del Velocidad del Viento**

Se supuso una velocidad del viento (v(h)) en función a distintas alturas del árbol, siendo vo la altura del ápice y cero a nivel del suelo (Cendoya et al. 2002). Al suponer esto, la velocidad en función de la altura quedó establecida como:

$$v(h) = v_o (1-h/H_o)$$

Donde Ho: altura total del árbol  
 A: nivel suelo se tuvo que h = Ho y en donde la velocidad del viento es nula,  
 mientras que a nivel del ápice (h = 0), la velocidad del viento es vo.

### **Distribución de la Fuerza Ejercida por el Viento**

Se establecieron coordenadas a nivel del ápice desde donde se midieron las distintas alturas en el árbol.

La fuerza ejercida sobre una diferencial de área (dF), fue expresada como:

$$dF = P \, dA \quad (2)$$

pero  $dA = 2 R dh$ . Además se consideró que la presión ejercida por el viento fué proporcional al cuadrado de la velocidad ( $P = cte v^2$ ) (Cendoya et al. 2004).

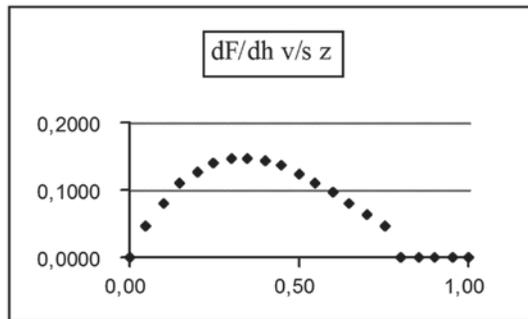
Matemáticamente esto se puede escribir de la forma:

$$dF = cte vo^2 (1 - h/Ho)^2 2 R(h) dh \quad (3)$$

Definiendo ahora  $z = h/Ho$  puede expresarse la fuerza en términos de esta nueva variable, la que toma valores entre 0 y 1. Llámese  $p$  a la intensidad de la carga, es decir, la fuerza por unidad de longitud ( $p = dF/dh$ ) se tiene:

$$\begin{aligned} p = dF/dh &= cte 2 Ro vo^2 Ho/H' z (1 - z)^2 & 0 < z < H'/Ho \\ p = 0 & & H'/Ho < z < 1 \end{aligned} \quad (4)$$

La Figura N° 2 muestra la intensidad de carga (fuerza por unidad de longitud) en función de la altura medida según la variable  $z$  antes mencionada.



$Ho = 25 (m)$     $H' = 20 (m)$     $Ro = 3,0 (m)$

**Figura N° 2**  
**INTENSIDAD DE CARGA VS. ALTURA**

**Esfuerzo de Corte**

Sea  $Q$  el esfuerzo de corte, éste se definió mediante:

$$Q = \int dQ = - \int p(h) dh = - Ho \int p(z) dz \quad (5)$$

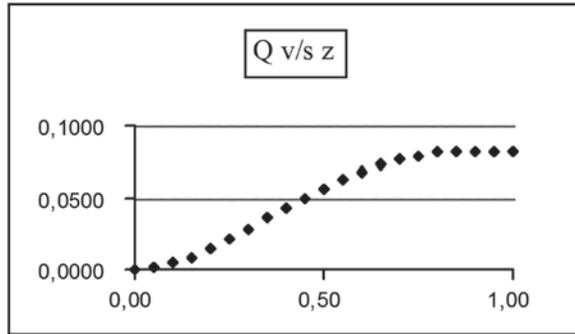
Cálculo de  $Q$  para el tramo  $0 < z < H'/Ho$

$$Q = - Ho \int_0^{H'/Ho} p(z) dz = cte 2 Ro vo^2 Ho^2/H' [z^2/2 (1-4 z/3+z^2/2)] \quad (6)$$

Cálculo de  $Q$  para el tramo  $H'/Ho < z < 1$

$$Q = - Ho \int_{H'/Ho}^1 p(z) dz = cte 2 Ro vo^2 Ho^2/H' [H'^2/(2Ho^2) z^2/2 (1-4 H'/3Ho+H'^2/2Ho^2)] \quad (7)$$

La Figura N° 3 muestra el esfuerzo de corte en función de la altura



**Figura N° 3**  
**ESFUERZO DE CORTE VS. ALTURA**

**Momento Flector sobre el Fuste**

El momento flector (M) se relacionó con el esfuerzo de corte, mediante:

$$M = \int dM = \int Q dh = Ho \int Q(z) dz \tag{8}$$

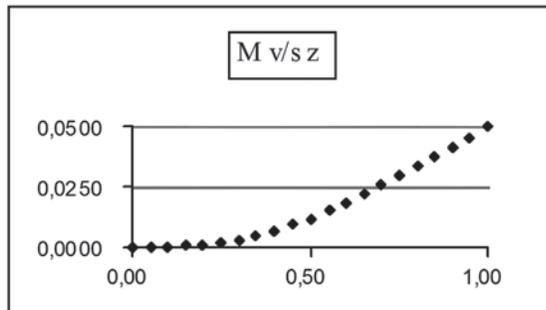
Cálculo de M para el tramo  $0 < z < H'/Ho$

$$M = - Ho \int_0^z Q(z) dz = cte 2 Ro vo^2 Ho^3/H' [z^3/3 (1 - z + 3 z^2/10)] \tag{9}$$

Cálculo de M para el tramo  $H'/Ho < z < 1$

$$M = - Ho \int_{H'/Ho}^z p(z) dz = cte 2 Ro vo^2 Ho^3/H' \{ [(H'/Ho)^3 /6] (1 - H'/Ho + 3(H'/Ho)^2 /10) \} + [(H'/Ho)^2 /2 (1 - 4H'/3Ho + (H'/Ho)^2 /2) ] (z - H'/Ho) \} \tag{10}$$

La Figura N° 4 muestra el momento flector en función de la altura.



**Figura N° 4**  
**MOMENTO FLECTOR VS. ALTURA**

### Esfuerzo Máximo por Flexión ( $\sigma$ )

El esfuerzo por flexión ( $\sigma$ ) se relacionó con el momento flector, mediante:

$$\sigma = M Y / I \quad (11)$$

Donde, Y corresponde a la distancia desde el extremo al centro, en nuestro caso  $Y = \rho$  en que  $\rho$  es el radio del tronco; I corresponde al momento de inercia, el cual para la sección del tronco viene dado por:

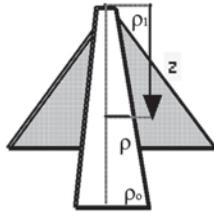
$$I = \pi \rho^4 / 4 \quad (12)$$

A su vez el radio del tronco  $\rho$  y la variable  $z (= h/H_0)$  se relacionan mediante:

$$\rho = [(\rho_0 - \rho_1)/H_0] H_0 z + \rho_1 \quad (13)$$

Donde  $\rho_0$  es el radio del tronco a nivel del suelo y  $\rho_1$  el radio del mismo en el ápice, ya que no puede ser nulo (Fig. 5).

La Figura N° 5 muestra las variables y parámetros involucrados para el fuste



$\rho_0$ : radio del fuste en la base del él.  
 $\rho_1$ : radio del fuste en el ápice.

$\rho$ : radio del fuste en una posición z.  
 $z = h/H_0$

**Figura N° 5**  
**VARIAIBLES Y PARÁMETROS FUSTE**

Al reemplazar las expresiones para Y y para I en función de la variable z se tiene:

$$\sigma = M Y / I = M(z) \rho / (\pi \rho^4 / 4) = M(z) (4/\pi) H_0^3 / [(\rho_0 - \rho_1) z + \rho_1]^3 \quad (14)$$

reemplazando ahora el valor antes obtenido para M(z) en cada tramo se llega a:

Cálculo de  $\sigma$  para el tramo  $0 < z < H'/H_0$

$$\sigma = cte 2 R_0 v_0^2 (H_0^3/H') 4 H_0^3 / \pi [z^3/3 (1 - z + 3 z^2/10)] / [(\rho_0 - \rho_1) z + \rho_1]^3 \quad (15)$$

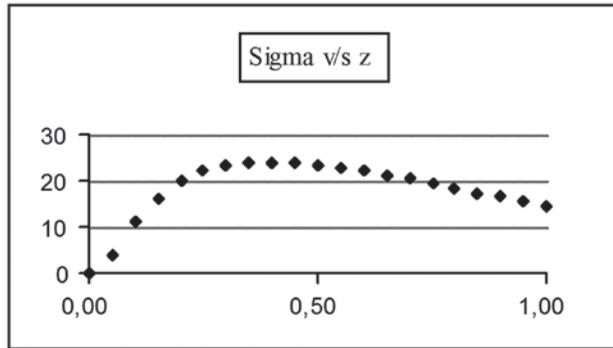
Cálculo de  $\sigma$  para el tramo  $H'/Ho < z < 1$

$$\sigma = cte \frac{2 R_o v_o^2 (H_o^3/H') - 4 H_o^3 / \pi \{ [(H'/H_o)^3 / 6] (1 - H'/H_o + 3(H'/H_o)^2 / 10) \} + [(H'/H_o)^2 / 2 (1 - 4H'/3H_o + (H'/H_o)^2 / 2)] (z - H'/H_o) \} / [(\rho_o - \rho_i) z + \rho_i]^3 \quad (16)$$

Para este gráfico se utilizaron los mismos valores anteriores y se agregaron:

$r_o = 0.15$  (m) y  $r_i = 0.01$  (m)

La Figura N° 6 muestra el esfuerzo por flexión en función de la altura.



**Figura N° 6**  
**ESFUERZO DE FLEXIÓN VS. ALTURA**

### CONCLUSIONES

El modelo obtenido indica que la zona más probable de fractura se ubicaría en la mitad superior del árbol. Cabe señalar que el modelo no consideró la posibilidad de que el viento volcara el árbol, ni variables relacionadas con la resistencia intrínseca de la especie, el tipo de suelo, y contenido de humedad.

Un modelo más acabado debería considerar la flexión sufrida por el tronco, las diferentes alturas de podas, la interacción con el viento y su potencial posibilidad de fractura. De esta manera, sería posible establecer alturas adecuadas de podas, que cumplieran por un lado con el objetivo de mejoramiento de la madera y por otro disminuir el riesgo de caída o fractura de los árboles.

## REFERENCIAS

**Alexander, R. R., 1967.** Windfall after clear cutting on Fool Creak-Fraser Experimental Forest, Colorado. U.S.D.A. Forest Service, Rocky Mountain Forest and Range Experimental Station Research Note R.M. 92. 11 pp.

**Day, W.R., 1950.** The Soil Conditions which Determine Windthrow in Forest. Forestry, Vol.23 #2, pp: 90-95.

**Cendoya, P. y Muñoz, F., 2002.** Modelamiento de Efecto del Viento sobre Árboles Jóvenes de Pinus radiata D.Don. Revista Bosque (23), N°2:51-56

**Cendoya, P., Muñoz, F., Dechent, P. y Morbelli, M., 2004.** Desarrollo de un Macromodelo de Predicción del Daño por Viento en Plantas Juveniles de Pinus radiata D.Don. Ciencia e Ingeniería Revista de Ingeniería

**Fraser, A.I., 1964.** The Soil and Roots, as Factors in Tree Stability. Forestry Vol 35 (1): 117-127.

**Fraser, A. I. and Gardiner, J.B.H., 1967.** Rooting and Stability in Sitka Spruce. Bull. For. Comm. London 40.