

MODELOS DE CRECIMIENTO INDIVIDUAL PARA RENOVALES DE ROBLE (*Nothofagus obliqua* (Mirb)(Oerst)) Y RAULÍ (*Nothofagus alpina* (Poepp et Endl))

CARLOS BAHAMÓNDEZ VILLARROEL.

Ingeniero Forestal, Instituto Forestal, División Ordenación Forestal e Inventarios.

RESUMEN

Se presenta un modelo de crecimiento individual en diámetro para renovales de Roble-Rauli. Se utilizan datos provenientes de parcelas permanentes instaladas con este propósito por el Instituto Forestal en el marco del proyecto "Investigación Modelos de Simulación para Renovales de Roble-Rauli" encargado por la Corporación de Fomento de la Producción. Se calculan dos ecuaciones para la estimación del incremento anual corriente en DAP para roble y rauli, tanto para monte bajo como monte alto. La metodología utilizada comprende el uso del concepto de Espacios de Estados y el método de estimación corresponde al uso de Máxima Verosimilitud.

Palabras Clave: Modelos de Crecimiento, Renovales, Nothofagus obliqua, Nothofagus alpina.

ABSTRACT

A diameter growth model for Roble - Rauli second growth forest is proposed. The models are based in data from permanent plots installed by the project "Research in Simulation Models in Roble - Rauli Second Growth Forest" sponsored by CORFO (Corporación de Fomento de la Producción). Two annual increment in diameter model for Roble - Rauli natural forest are estimated, the first one for coppice forest and the second one for forest regenerated from seed. The models are based on the space state approach and the parameter estimation method is the maximal likelihood.

Keywords: Growth Models, Second Growth Forests, Nothofagus obliqua, Nothofagus alpina.

INTRODUCCIÓN

Los renovales de Roble Raulí se caracterizan por cubrir zonas cordilleranas en situaciones de media ladera entre los 600 y 1200 m.s.n.m. Su distribución geográfica alcanza desde las Regiones VIII a X, presentándose bajo variadas situaciones climáticas y geográficas. Gran parte de las masas boscosas deben su origen a fenómenos de carácter catastrófico, como son incendios fortuitos o intencionales, y cortas indiscriminadas para habilitación de tierras de pastoreo. Debido a esto, la mayoría de los individuos provienen de regeneración de tocón, dada la alta capacidad de retoñación de las especies componentes del tipo como son roble (*Nothofagus obliqua*), raulí (*Nothofagus alpina*), lingue (*Persea lingue*) tepa (*Laurelia philippiana*), avellano (*Gevuina avellana*) entre las más importantes.

Debido a su origen los rodales de roble-raulí presentan desde etapas muy tempranas efectos de competencia, a nivel de retoños en el tocón primero y por espacio y luz luego, cuando la selección de retoños ha reducido el número de varetas. Esta dinámica competitiva presente en todas las etapas de crecimiento del renewal, puede ser positiva ya que estimula en el inicio del desarrollo, la selección de individuos mejor dotados o favorecidos. A su vez, el rápido desarrollo en altura le permite dejar atrás a posibles competidores. Sin embargo, esta temprana acentuación de la competencia por recursos tiene también aspectos negativos, ya que como resultado de ella, la variabilidad de tamaños es manifiesta desde mucho antes que en el caso de renovales con espaciamientos más regulares. Otro aspecto negativo derivado del origen de los renovales es la imposibilidad de los individuos de acceder a nuevos espacios disponibles, ya que la posición del tocón que les dió origen se mantiene en el tiempo, arrastrando con ella sus características de recursos, localización espacial, y en cierto modo determinando el crecimiento futuro por las características históricas asociadas a la localización del tocón.

De acuerdo a lo anterior, la modelación de éstos rodales a un nivel agregado, como puede ser el caso de los modelos de crecimiento basados en datos medios por hectárea, no aparece como recomendable, ya que sus datos se basan sobre condiciones de sitio homogéneas. La alternativa es utilizar un enfoque de modelación desagregado, como los modelos de crecimiento de árbol individual. Esto permite dar cuenta de las relaciones de competencia interindividuos entregando un modelo basado en una conceptualización con carácter más explicativo que descriptivo.

El crecimiento a nivel individual para renovales de Roble Raulí se ha determinado como una forma de alimentar el modelo de simulación producto del proyecto INFOR (filial CORFO) "Investigación Modelos de Simulación para Renovales de Roble-Raulí". Este proyecto está orientado a habilitar tecnología para evaluar distintos escenarios de manejo. El crecimiento para propósitos de este estudio se considera como

el cambio gradual en tamaño y funcionalidad a través del tiempo. Este proceso se encuentra afectado por diversas componentes, entre las que destacan dos principales, las de origen meramente genéticas (genotípicas) y las de origen ambiental (fenotípicas). Ambas condicionantes controlan el crecimiento afectando en forma positiva o negativa este proceso.

En el presente estudio se considera la evaluación del crecimiento, teniendo presente el entorno inmediato del individuo como un indicador de la competencia por recursos. Esta aproximación permite el modelar el crecimiento mediante el uso de índices que miden el grado de competencia que caracteriza a cada individuo, dada su posición relativa y su tamaño actual.

Se analizan el crecimiento en DAP (Diámetro a la altura del pecho), incluyendo un índice que aproxima la dominancia o preponderancia del individuo para con los competidores inmediatos. A su vez, se calculan ecuaciones de crecimiento juvenil en diámetro y ecuaciones de crecimiento en altura total.

MODELOS Y MÉTODOS DE ESTIMACIÓN

Para la estimación de los modelos de crecimiento se utiliza la aproximación de espacios de estado, descrita por Garcia (1979,1984). Esta aproximación permite mediante el uso de datos actuales describir el comportamiento futuro, bajo el supuesto que el comportamiento de la variable en el futuro se encuentra determinado por su estado actual, es decir, dos individuos con estados actuales iguales se comportarán de la misma forma en el futuro no importando su historia pasada (Garcia 1994). A su vez y sobre la base de los supuestos descritos por Garcia (1984), se asume que si la muestra es lo suficientemente grande, existe mayor probabilidad de explicar mas situaciones de crecimiento, puesto que se dispondrá de mayor cantidad de puntos de partida, en que cada individuo representa un estado compuesto por variables de tamaño (diámetro, altura, diámetro de copa, etc) y variables de competencia (dominancia W en este caso).

Modelo de Estimación de Crecimiento en Diámetro.

De acuerdo con lo anterior, y para el caso de la estimación de crecimiento en diámetro, el vector de partida corresponde a:

$$dy/dt = f(DAP, W)$$

Este enfoque permite incluir la competencia por recursos, como variable explicatoria de la variación en respuestas que presentan diámetros similares. La modelación de individuos se realiza sobre la base de la descripción del crecimiento

potencial en diámetro (descrito por los datos) y controlado por un estimador de la competencia.

El siguiente modelo fue evaluado para la estimación del crecimiento en diámetro:

$$\frac{dy}{dt} = \delta + \frac{\alpha}{(1 + \exp(\beta - \tau y))} \quad (1)$$

donde:

- dy/dt : Incremento de variable dependiente (DAP,H,AB,etc)
 $\alpha, \beta, \delta, \tau$: Coeficientes de regresión.
 y : Variable independiente ($y=W*DAP$).

con

$$W_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{(dx - d_{ij})} \frac{(D_i - D_j)}{(D_i + D_j)} \quad (2)$$

donde:

- W_i = Dominancia del árbol "i"
 D_i = Diámetro (DAP) del árbol objeto "i"
 D_j = Diámetro (DAP) del árbol competidor "j"
 d_{ij} = Distancia entre árbol objeto y árbol competidor.
 dx = Radio máximo de influencia (4.1 m).
 n = Número de individuos competidores en el radio máximo.

En el modelo descrito se utiliza como variable independiente la variable transformada $W*DAP$. Esta variable permite la ponderación necesaria para el control del incremento estimado en diámetro, de acuerdo al estado del individuo en relación con su entorno inmediato. El uso de esta variable evita que la curva (1) presente asíntota fija independiente de la densidad, posibilitando con esto, el alcance de valores altos de incremento si existe una liberación del individuo de sus competidores inmediatos.

Modelo de Estimación para la Altura Comercial.

Para la estimación de la altura comercial se presenta el modelo logístico siguiente:

$$\frac{dH}{dt} = \alpha H - \beta H^2 \quad (3)$$

donde

dH/dt	:	Incremento anual corriente en altura comercial (m)
α, β	:	Coefficientes de regresión.
H	:	Altura comercial (m)

La integral de la expresión (2) corresponde a:

$$H_t = \frac{MH_0}{H_0 + (H_0 + (M - H_0) \exp[-\beta M \Delta t])} \quad (4)$$

donde

H_t	:	Altura comercial (IU=10 cm) (m)
H_0	:	Altura inicial.
M	:	Asíntota (α/β).
Δt	:	Intervalo de tiempo.

Estimación de Parámetros Asociados a los Modelos.

La estimación de los parámetros del modelo para crecimiento en diámetro se realizó mediante la aproximación de las Series de Expansión de Taylor (Apéndice N° 1). Para el modelo de crecimiento en altura se utiliza mínimos cuadrados.

- Estimación de Parámetros para Ecuación de Crecimiento en Diámetro.

El método de ajuste consiste en la búsqueda de los parámetros $\alpha, \beta, \delta, \tau$ mediante iteraciones que evalúan las diferencias entre valores observados y valores estimados en función de los parámetros iniciales y de acuerdo a su función de verosimilitud. La expresión utilizada para la estimación de parámetros basados en la serie de expansión de Taylor para la primera derivada es:

$$y_i - f_i \sum_{j=1}^p (\theta_j - \theta_{i,obs}) \left[\frac{df(\theta)}{d\theta_j} \right] + e_i \quad (5)$$

donde

y_i	:	Valores observados de la variable dependiente.
f_i	:	Valores estimados por la función en función de los parámetros θ_j .
b_j	:	Valor poblacional de parámetros.

$b_{i,obs}$:	Valor inicial estimador de parámetros.
$df(b)/db_i$:	Derivada de función respecto al parámetro.
e_i	:	Error

Verosimilitud de los Estimados.

En los casos de regresión de modelos lineales, el estimador máximo verosímil corresponde con las ecuaciones normales del método de los mínimos cuadrados. Sin embargo, el modelo (1), no permite la construcción de ecuaciones normales debido a lo dificultoso de su diferenciación, luego se debe establecer la expresión de la función de verosimilitud calculando la función de probabilidad conjunta para los incrementos dado los parámetros $\alpha, \beta, \delta, \tau$. Entonces, la función logarítmica de verosimilitud, corresponde a:

$$\log L(\alpha, \beta, \delta, \tau) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) - \frac{n}{2\sigma^2} \sum (y_i - E(y_i))^2 \quad (6)$$

donde

\log	:	Logaritmo natural base e
σ^2	:	Varianza de los incrementos en diámetro.
n	:	Número de observaciones.
$E(y_i)$:	Esperanza del estimado.

Estimación de parámetros para ecuación de crecimiento en Altura.

La estimación de los parámetros α, β del modelo (3) se calcula mediante Mínimos Cuadrados Ordinarios, utilizando los estadígrafos indicadores de ajuste, característicos del método, como son el coeficiente de determinación (r^2), el Cuadrado Medio del Error (CME%), el Error Estándar de Estimación (S_{yx}), el estimador de autocorrelación Durbin y Watson, y el Coeficiente de autocorrelación (ρ).

Las expresiones siguientes describen los estadígrafos citados:

$$r^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{\sum \left[\hat{y} - \bar{y} \right]^2}{\sum \left[y - \bar{y} \right]^2} \quad (7)$$

$$CME\% = \frac{100}{x_{\text{medio}}} \sqrt{\frac{\sum [x_o - x_e]^2}{n}} \quad (8)$$

$$S_{yx} = \sqrt{CME} = \sqrt{\frac{\sum [x_o - x_e]^2}{n}} \quad (9)$$

$$d = \frac{\sum (e_t - e_{t+1})^2}{\sum e_t^2} \quad (10)$$

$$\rho = \frac{N^2(1 - d/2) + k^2}{N^2 - k^2} \quad (11)$$

donde

- $e_{t,t+1}$: Errores de la observación t y $t+1$.
 N : Número total de observaciones.
 k : Número total de parámetros del modelo incluida la constante.

DATOS

Los datos básicos provienen de parcelas permanentes instaladas en 1991 bajo el proyecto "Investigación modelos de Simulación para renovales de Roble-Raulí". Estas parcelas en número de 3, comprenden una extensión de 1 hectárea cada una y 2 de ellas se localizan en la cordillera de los Andes; en el límite de la VIII y IX Regiones, frente a la Reserva Forestal Malleco, específicamente en los predios EL Morro y El Carmen y Maitenes de propiedad de Forestal JCE. Una tercera parcela se ubica en la X Región, en el sector del Complejo Panguipulli, Nueva Remeco, de propiedad de Neltume y Carranco. El total de árboles muestreados corresponde a 3962 individuos con rangos de edad entre 37 y 56 años.

Cada parcela permanente presenta mayoritariamente raulí (*Nothofagus alpina*) y roble (*Nothofagus obliqua*) en el dosel superior, y lingue (*Persea lingue*), avellano (*Gevuina avellana*) y tepa (*Laurelia phillypiana*) en los doseles intermedio e inferior.

En cada parcela permanente se obtiene información de tamaño de cada individuo, DAP, altura total, altura a inicio de copa, diámetro a inicio de copa, Diámetro de Copa, muestra de edad y posición en plano cartesiano de todos los individuos. Para la estimación de mortalidad se ha realizado un seguimiento de éstas parcelas durante 5 años.

El cuadro N° 1 describe la distribución de frecuencias en diámetro para las parcelas permanentes de las Regiones VIII-IX y X.

Cuadro N°1
DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS DE DIÁMETROS PARCELAS PERMANENTES.

Clase Diamétrica (cm)	VIII-IX	X
	Frecuencia Relativa (%)	Frecuencia Relativa (%)
10-15	28	51
15-20	19	46
20-25	22	3
25-30	22	-
30-35	7	-
35-40	1	-
40-45	1	-
Total	100	100

AJUSTE DE MODELOS Y RESULTADOS.

Modelos de Estimación de Crecimiento Diametral.

El modelo final para las zonas comprendidas entre las Regiones VIII (Sur), IX y X se describe a continuación:

Cuadro N°2
PARÁMETROS DE ECUACIONES DE CRECIMIENTO EN DIÁMETRO, (REGIONES VIII Y IX,
DAPC/C ENTRE 10 Y 30 CM) (REGIÓN X, DAPC/C ENTRE 10 Y 20 CM)

Parámetros	VIII y IX	X
α	0,48910	1,052
β	-0,10200	-0,028
τ	0,65510	0,196
δ	0,014985	0,352

Validación de los Modelos de Crecimiento en Diámetro.

Para evaluar el comportamiento del modelo de acuerdo a valores medios de competencia por clase diamétrica, se compara con datos reales de incrementos, evaluando el modelo de acuerdo a las características reales de tamaño y dominancia de la observación real..

Las figuras N° 1 y N° 2 describen el comportamiento de las curvas de crecimiento en diámetro para las Regiones VIII-IX y X, respectivamente, en función de distintos niveles de dominancia teóricos, y comparan el comportamiento del modelo evaluado con datos reales. En la Figura N° 1, la curva "Dom+" describe la trayectoria de un individuo cuya dominancia se mantiene en el tiempo sin variación, y corresponde con un árbol dominante. Por su parte, la curva "Dom -" describe el comportamiento de un individuo suprimido y con dominancia negativa, mientras que la curva "Dom prom" representa a un individuo sometido a dominancia media, esto es con presencia de competidores a niveles tolerables en número y distancia. Se puede considerar esta situación como representativa de la realidad para la mayoría de los renovales, es decir, un bosque cuya competencia esta evidenciando efectos negativos por la presencia de individuos competidores, pero cuya situación es posible de revertir mediante raleo. Al observar la curva "inreal", se concluye que los individuos de diámetros pequeños (rangos de 10 a 20 cm) están afectados por dominancia excesiva de competidores, mientras que el rango diamétrico superior (mas de 20 cm), se encuentra en situación aún favorable y recuperable.

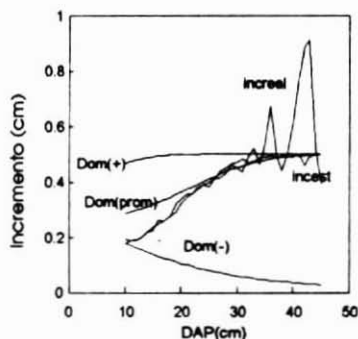


Figura N° 1. COMPORTAMIENTO DEL MODELO VIII Y IX REGIONES FRENTE A DATOS REALES.

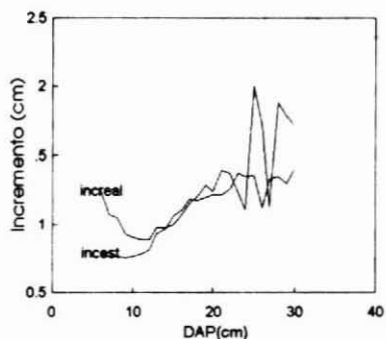


Figura Nº2. COMPORTAMIENTO DEL MODELO X REGIÓN FRENTE A DATOS REALES.

Es interesante notar que individuos de gran tamaño sometidos a alta dominancia por sus competidores inmediatos aparecen más fuertemente afectados que individuos más pequeños. Esto concuerda con el supuesto básico, que individuos más grandes crecen más, pero, a su vez, se verían más afectados por competencia dada la necesidad de mantener un sistema más grande. Luego una reducción en la disponibilidad de recursos redundaría en una pérdida de crecimiento en favor de la mantención individual.

Las curvas "increst" e "increst" de las Figuras Nº 1 y Nº 2, muestran como el modelo se ajusta a los valores medios reales calculados a partir de la muestra, de dominancia y diámetro. Es evidente de la Figura Nº 1, correspondiente al modelo de las Regiones VIII-IX, que diámetros superiores a 30 cm difícilmente son bien representados por el modelo. Esto debido por una parte, a la baja muestra asociada a estos tamaños (menos del 10%, Cuadro Nº1) y por otra a que los individuos que presentan estos tamaños distan mucho de ser representativos de un renoval. Es evidente la gran variación asociada a valores reales de incrementos de éstos individuos, por lo que el modelo tiende a ser asintótico a niveles de DAP mayores de 32 cm.

El modelo asociado a la X Región, describe un comportamiento consistente en el rango de DAP de 10 a 20 cm para la evaluación a partir de datos medios reales provenientes de la parcela permanente. Dado lo anterior, proyecciones de individuos de diámetros fuera de estos rangos tenderán a tomar valores de asintóticos.

La Figura Nº 2 muestra el ajuste de las curvas estimadas a las observadas, para un grupo de individuos de las Regiones VIII y IX. La selección se realizó en forma de representar todos los tamaños.

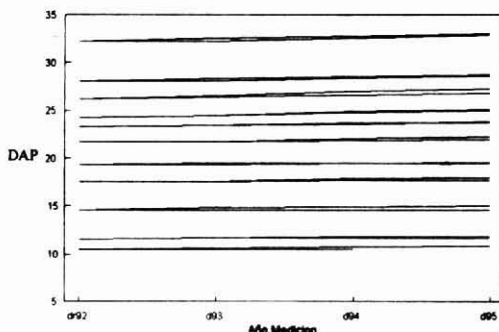


Figura N°3. COMPARACIÓN ENTRE DIÁMETROS OBSERVADOS Y ESTIMADOS POR EL MODELO VIII-IX.

Se observa en la Figura N° 3 que el ajuste de la función de crecimiento para las Regiones VIII-IX, dentro del rango de validación de 3 años, es aceptable. Los datos reales comprenden las lecturas anuales de los individuos contenidos en las parcelas permanentes, que a la fecha corresponden a 4 mediciones. Aunque no se cuenta con mayor período de medición, en el tramo descrito la proyección del crecimiento en diámetro es confiable. Este ejercicio no es posible de realizar para la X Región debido a que el período de mediciones no supera aún los 2 años.

Modelos de Estimación de Crecimiento en Altura.

Los coeficientes estimados del modelo de crecimiento en altura corresponden a los siguientes:

$$\alpha : 0,102382$$

$$\beta : -0,004656$$

con:

$$r^2 : 0,6454$$

$$S_{yx} : 0,004806$$

$$n : 407$$

$$d : 1,887$$

$$\rho : 0,0565$$

La Figura N° 4 muestra el comportamiento de la curva de crecimiento en altura comercial (IU=10 cm), en un período de 40 años para individuos de 10,14,18 y 21 m de altura inicial. Esta curva de crecimiento presenta una asíntota de 22 m y se aplica por igual a cualquier individuo de los renovales cuya altura inicial sea menor al valor asíntótico.

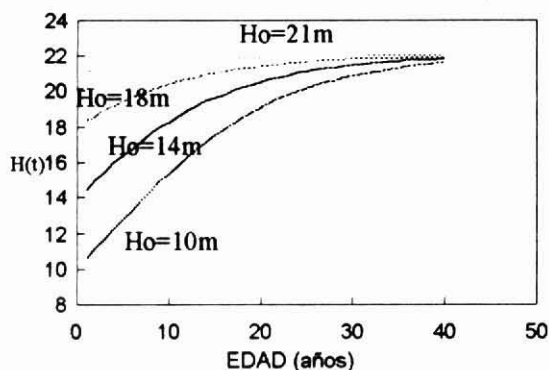


Figura N°4. COMPORTAMIENTO DE LA CURVA DE CRECIMIENTO EN ALTURA COMERCIAL.

CONCLUSIONES

El análisis y evaluación de distintas pautas de manejo suele enfrentarse en Chile mediante la instalación de parcelas experimentales, esta alternativa resulta en la mayoría de los casos una aproximación muy costosa debido al tiempo que debe transcurrir para realizar las estimaciones.

Mediante el uso de las metodologías propuestas, las estimaciones de crecimiento, tanto juvenil como adulto, permitirán la realización proyecciones de crecimiento con suficiente solidez y confiabilidad estadística. Por otro lado, el apoyo de datos originados en parcelas permanentes permitirá a su tiempo la validación y calibración de estas ecuaciones mientras más mediciones incrementen las bases de datos respectivas. Las funciones de crecimiento presentadas resultan además en una poderosa herramienta de apoyo a la planificación del recurso renovales de Roble - Raulí al ser utilizadas en una plataforma computacional como un simulador.

REFERENCIAS

- Añifi A.A. Azen S.P., 1979. Statistical Analysis, a Computer Oriented Approach. Academic Press
- Bahamóndez C.; Martín M.; Kahler C.; Blanco R., 1992. Modelos Simulación para Renovales de Roble-Raulí. Informe Final-Etapa Preliminar. Instituto Forestal
- Bahamóndez C.; Martín M.; Kahler C.; Blanco R., 1993. Investigación Modelos de Simulación para Renovales de Roble-Raulí. Informe de Avance. (Junio 1993). Instituto Forestal.

- Bahamóndez C.; Martín M.; Kahler C.; Blanco R., 1994.** Investigación Modelos de Simulación para Renovales de Roble-Raulí. Informe de Avance. (Diciembre 1994). Instituto Forestal.
- Bartlett M.S., 1966.** Stochastic Processes. Cambridge University Press.
- García O., 1984.** New Class of Growth Models for Even-Aged Stands: *Pinus radiata* in Golden Downs Forest. New Zealand Journal of Forestry Science 14(1): 65-68 (1984)
- García O., 1994.** The State-space Approach in Growth Modelling. Canadian Journal of Forest Research. 24: 1894-1903. 1994.
- Scheid F.; Di Constanzo R.E., 1991.** Métodos Numéricos. McGraw-Hill.
- Volkov E.A., 1990.** Métodos Numéricos. Editorial MIR - Moscú.

APÉNDICE 1

Estimación de Parámetros por Series de Expansión de Taylor.

Este método de búsqueda de parámetros para una función se basa en el método de aproximación polinomial o método del polinomio interpolador por Series de Expansión de Taylor. Esta técnica es particularmente útil para estimación de parámetros en funciones no lineales.

Sea el polinomio:

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\partial^k f(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (1)$$

Conocido como el polinomio de Taylor, con la propiedad de que en el punto $X=X_0$ todas sus derivadas del orden hasta n , coinciden con las derivadas correspondientes a la función $f(x)$.

De acuerdo con esta propiedad el polinomio de Taylor asegura una excelente aproximación de la función $f(x)$. El error que se obtiene debido a la aproximación por $Q(x)$ de $f(x)$ se expresa por :

$$f(x) - Q_n(x) = \sum_{i=1}^p (\theta_i - \theta_{i,obs}) \frac{\partial Q(\xi, \theta)}{\partial \theta_i} + \varepsilon \quad (2)$$

Cuando es necesario encontrar parámetros para una función en particular $g(x)$, es decir, la expresión de $g(x)$ es conocida y de interés por parte del investigador. entonces $Q(x)$ ya no es objeto de búsqueda como expresión, sino que evaluar $g(x)$. Esto implica utilizar la expresión (2) como algoritmo de búsqueda de los parámetros θ de forma de minimizar el error por medio de iteraciones sobre la expresión (3) variando los valores de $\theta_{i,obs}$.

$$f(x) - g(x, \theta) = \sum_{i=1}^p (\theta_i - \theta_{i,obs}) \frac{\partial g(x, \theta)}{\partial \theta_i} + \varepsilon \quad (3)$$

Procedimiento para el Cálculo de los Parametros en la Forma Matricial.

Cuando se trabaja con muchos datos es conveniente utilizar la forma matricial de estimación de parámetros, para esto es recomendable considerar los siguientes datos y procedimientos:

- 1) Establezca cuantos parámetros θ tiene la función seleccionada. Por ejemplo la función $g(x) = \alpha \exp(\beta x)$ presenta 2 parámetros a estimar α, β

- 2) Calcule las derivadas parciales de la función respecto a los parámetros α, β
- 3) Evalúe las derivadas respecto a los parámetros para un set inicial tentativo de parámetros $\theta_i = \alpha_i, \beta_i$. Esto genera la matriz S .

$$S = \begin{bmatrix} \frac{\partial g(1)}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial g(1)}{\partial \theta_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g(n)}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial g(n)}{\partial \theta_n} \end{bmatrix}$$

- 4) Evalúe la función $g(x)$ (vector F), para los parámetros iniciales tentativos $\theta_1 = \alpha_1, \beta_1$ y establezca el vector de valores observados O .

$$F = \begin{bmatrix} g_1(\alpha, \beta) \\ \vdots \\ g_n(\alpha, \beta) \end{bmatrix} \quad O = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

- 5) Calcule el vector de diferencias Y entre valores observados O y estimados F

$$Y = \begin{bmatrix} a_1 - f_1 \\ \vdots \\ a_n - f_n \end{bmatrix}$$

6) Considere la siguiente versión matricial de (3).

$$[P] = [S^T S]^{-1} S^T Y$$

donde

$$[P] = [\theta_j - \theta_{est.j}]$$

Este vector P expresa la diferencia entre el parámetro tentativo θ_i y el θ_{real} . Luego mediante iteraciones, se puede encontrar el conjunto de parámetros que minimice el error (3).